উচ্চতর গণিত (সূত্রাবলী)
দ্বাদশ শ্রেণি
অধ্যায়-৪ঃ বহুপদী ও বহুপদী সমীকরণ

- সমীকরণ: এক বা একাধিক জানা পদ এবং অজানা পদের মধ্যে সমতা সম্পর্কই হল সমীকরণ ।
- মূল: সমীকরণ সমাধান করে প্রাপ্ত অজ্ঞাত পদের মানই হলো সমীকরণের মূল,যদি প্রাপ্ত মান দ্বারা সমীকরণ সিদ্ধ হয়।
- অবান্তর মূল: সমাধান প্রক্রিয়ার কারণে কোনো কোনো সময় এমন মান পাওয়া যেতে পারে যা প্রদত্ত সমীকরণকে সিদ্ধ করে না ।এরুপ মানকে অবান্তর মূল বলে ।
- কোনো সমীকরণে চলকের সর্বোচ্চ ঘাত যত সে সমীকরণের মূল ও তত ।
- বহুপদী : যে বীজগাণিতিক রাশি এক বা একাধিক পদ বিশিষ্ট এবং এক বা একাধিক চলক বিশিষ্ট এবং যার চলকের ঘাত অঋণাত্বক পূর্ণসংখ্যা, তাকে বহুপদী বলে।
  - ✓ যেমনঃ $x^2 - 5x + 2$ একটি বহুপদী কিন্তু $x^2 - \sqrt{x} + 1$ বহুপদী নয়।
- যে বহুপদীর সকল পদের ঘাত সমান তাকে সমমাত্রিক বহুপদী আর যে বহুপদীর সকল পদের ঘাত সমান নয় তাকে অসমমাত্রিক বহুপদী বলে।
  - ✓ যেমনঃ $ax^2 + 2hxy + by^2$ একটি সমমাত্রিক বহুপদী কিন্তু $ax^2 + bx + c$ অসমমাত্রিক বহুপদী।
- যদি বহুপদীটির মান শূন্য হয়, তবে তাকে বহুপদী সমীকরণ বলে। যেমনঃ $x^2 + x + 1 = 0$ একটি বহুপদী সমীকরণ।
- কোন বহুপদী সমীকরণের চলকের সর্বোচ্চ ঘাতকে ঐ সমীকরণের ঘাত বলে। যেমনঃ $x^2 + 3x + 2 = 0$ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ।

- **যে সমীকরণে চলকের সর্বোচ্চ ঘাত দুই তাকে দ্বিঘাত সমীকরণ বলে ।**
  - ✓ $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণটিকে আদর্শ দ্বিঘাত সমীকরণ বলা হয়, যেখানে $a \neq 0$ ।
- **যেকোনো দ্বিঘাত সমীকরণের জটিল মূল গুলো জোড়ায় জোড়ায় থাকে ।অর্থাৎ একটি মূল** a +ib **হলে অপরটি হবে** a- ib
- যে সমীকরণ অজানা পদের সকল মান দ্বারা সিদ্ধ হয় তাকে অভেদ বলে ।

❖ $ax^2 + bx + c = 0$, যেখানে $a \neq 0$ সমীকরণটির সমাধান নির্ণয়(শ্রীধর আচার্যের পদ্ধতি)ঃ

আমরা পাই, $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

অর্থাৎ $ax^2 + bx + c = 0$, যেখানে $a \neq 0$ সমীকরণটির মূলদ্বয় হচ্ছে $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ এবং $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ।

- নোটঃ (১) সমীকরণটির মূলদ্বয় α, β হলে তাদের যোগফল, $\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$ এবং গুণফল, $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ । এ সম্পর্ক দুটিকে মূল ও সহগের সম্পর্ক বলে।
- (২) $c \neq 0$ হলে উপরের সমীকরণের দুটি মূলই অশূন্য হবে। $c = 0$ এবং $b \neq 0$ হলে একটি মূল শূন্য হবে। $b = c = 0$ হলে দুটি মূলই শূন্য হবে।
- অমূলদ মূল জোড়ায় জোড়ায় থাকে যদি সমীকরণের সহগগুলো মূলদ হয়।
- b = 0 হলে দুটি মূল সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্ন যুক্ত হয়।
- a = c হলে দুইটি মূল একটি অপরটির উল্টো হয়।
- a ও c একই চিহ্নযুক্ত হলে মূলদুটি জটিল হয় এবং বিপরীত চিহ্ন যুক্ত হলে মূল দুটি বাস্তব হয়।

❖ দ্বিঘাত সমীকরণের মূলের প্রকৃতিঃ উপরের দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান হতে দেখা যায় যে, সমীকরণটির মূলদ্বয় কি রূপ হবে তা $b^2 - 4ac$ এর উপর নির্ভর করে। তাই $b^2 - 4ac$ কে সমীকরণটির নিশ্চায়ক বা পৃথায়ক বলে।

(১) মূলদ্বয় বাস্তব ও অসমান হবে, যদি $b^2 - 4ac > 0$ হয়।

(২) মূলদ্বয় বাস্তব ও সমান হবে, যদি $b^2 - 4ac = 0$ হয়।

(৩) মূলদ্বয় জটিল ও অনুবন্ধী হবে, যদি $b^2 - 4ac < 0$ হয়।

(৪) a, b, c প্রত্যেকে মূলদ হলে এবং $b^2 - 4ac$ পূর্ণবর্গ সংখ্যা হলে, মূলদ্বয় মূলদ হবে।

❖ একটি দ্বিঘাত সমীকরণের দুটি মূল দেয়া থাকলে সমীকরণটি নিম্নরূপে গঠন করা যায়ঃ

$$x^2 - \text{(মূলদ্বয়ের যোগফল)}\ x + \text{মূলদ্বয়ের গুণফল} = 0$$

❖ একটি ত্রিঘাত সমীকরণের মূলত্রয় সমান্তর প্রগমনে থাকলে, মূলত্রয়ের সাধারণ আকার হবে $\alpha - \beta,\ \alpha,\ \alpha + \beta$

❖ মূলত্রয় গুণোত্তর প্রগমনে থাকলে, মূলত্রয়ের সাধারণ আকার হবে $\frac{\alpha}{r},\ \alpha,\ \alpha r$

❖ মূলত্রয় ভাজিত প্রগমনে থাকলে, মূলত্রয়ের সাধারণ আকার হবে $\frac{1}{\alpha - \beta}, \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha + \beta}$ (অর্থাৎ সমান্তর প্রগমনের উল্টো)

- প্রতিসম রাশিঃ দুই বা ততোধিক চলক যুক্ত কোন রাশির যে কোন দুটি চলকের পরস্পর স্থান বিনিময়ের ফলে যদি রাশিটি একই থাকে, তবে তাকে প্রতিসম রাশি বলে।

❖ প্রতিসম রাশিতে $\sum$ এর ব্যবহারঃ

(i) $xy + yz + zx = \sum xy$

(ii) $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = \sum x^2y^2$

(iii) $x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + z^2x + zx^2 = \sum x^2y$

(iv) $a^3 + b^3 + c^3 = \sum a^3$

(v) $a^2 + b^2 + c^2 = \sum a^2$

- $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$
- $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2ab - 2bc - 2ca$
- $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$
- $a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$
- $a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^3 - 3(a+b+c)(ab + bc + ca) - 3abc$
- $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$
- $(a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab$