উচ্চতর গণিত (সূত্রাবলী)
একাদশ শ্রেণি
অধ্যায়-৯ঃ অন্তরীকরণ

- ক্যালকুলাস এমন একটি শাখা যেখানে অবিচ্ছিন্নভাবে পরিবর্তনশীল রাশি নিয়ে আলোচনা করা হয় ।
- বীজগণিত,ত্রিকোণমিতি এবং বিশ্লেষণমূলক জ্যামিতির উপর ভিত্তি করে ক্যালকুলাস প্রতিষ্ঠিত ।
- ক্যালকুলাস এর শাখা দুটি --- অন্তরীকরণ এবং যোগজীকরণ ।
- অন্তরীকরণ : একটি রাশির সূক্ষ্মাতিসূক্ষ্ম পরিবর্তনের জন্য অন্য একটি রাশির পরিবর্তন ।অর্থাৎ গণিতের এই শাখায় পরিবর্তনের হার নিয়ে আলোচনা করা হয় ।

অনুশীলনী-$9(A)$

ফাংশনের সীমা

❖ লিমিট : চলরাশি x এর মান একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা a অপেক্ষা বৃহত্তর বা ক্ষুদ্রতর মান গ্রহণপূর্বক a এর দিকে অগ্রসর হলে f(x) এর মান একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা l এর দিকে অগ্রসর হয় ,তবে l কে এর লিমিট বা সীমাস্থ মান বলে । একে $\lim_{x\to a} f(x) = l$ দ্বারা প্রকাশ করা হয় ।

➢ যেমন: $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ একটি ফাংশন

এখন যদি x = 3 হয় ,তবে $f(3) = \frac{0}{0}$,যা অনির্ণেয় এবং অর্থহীন ।

অর্থাৎ,x = 3 বিন্দুতে f(x) এর মান বিদ্যমান নেই ।

কিন্তু যদি x এর মান 3 না ধরে 3 এর নিকটবর্তী কোন মান ধরা হয়,অর্থাৎ x = 2.99,2.999,2.9999, ...ইত্যাদি মান বসালে f(x) = 5.99,5.999,5.9999,……….হয়।

আবার x = 3.01,3.001,3.0001,.........ইত্যাদি মান বসালে f(x) = 6.01,6.001,6.0001,…হয় ।

উভয়ক্ষেত্রে দেখা যায় যে চলমান রাশি x এর মান একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা 3 এর কাছাকাছি অগ্রসর হলে f(x) এর মান একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা 6 এর কাছাকাছি হয় । 6 কে বলা হয় f(x) এর সীমাস্থ মান।

অর্থাৎ $\lim_{x\to 3} f(x) = 6$

❖ ফাংশনের মান এবং সীমাস্থ মান একই জিনিস নয়। কোন বিন্দুতে ফাংশনের মান বিদ্যমান না থাকলেও তার সীমা বিদ্যমান থাকতে পারে । যেমন: x = 1 বিন্দুতে $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ এর মান বিদ্যমান নেই কিন্তু তার সীমা বিদ্যমান ।

❖ $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

❖ $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

❖ $x =$ a বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনের সীমা বিদ্যমান থাকবে যদি $\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a-} f(x)$ হয় ।

- $\lim_{x \to a+} f(x)$ হচ্ছে $x =$ a বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনের ডান সীমা ।
- $\lim_{x \to a-} f(x)$ হচ্ছে $x =$ a বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনের বাম সীমা ।

❖ x = a বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনকে অবিচ্ছিন্ন বলা হবে যদি $\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a-} f(x)$ = f(a) হয় ।

- f(a) হচ্ছে $x =$ a বিন্দুতে ফাংশনের মান।

❖ $\lim_{x \to a} f(x)$ এবং f(a) এর মধ্যে পার্থক্য : যদি চলরাশি x এর মান একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা a অপেক্ষা বৃহত্তর বা ক্ষুদ্রতর মান গ্রহণপূর্বক a এর দিকে অগ্রসর হয়ে a এর অতিনিকটবর্তী হয় তখন f(x) এর মান কে $\lim_{x \to a} f(x)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয় । ইহাকে f(x) এর সীমাস্থ মান বলে ।
অপরদিকে $x =$ a বিন্দুতে f(x) এর মানকে f(a) দ্বারা প্রকাশ করা হয় । অর্থাৎ ,f(a) হচ্ছে $x =$ a বিন্দুতে ফাংশনের মান।

❖ $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

❖ $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

❖ $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

অনুশীলনী-9(B)

❖ $2\cos^2 A = 1 + \cos 2A$
❖ $2\sin^2 A = 1 - \cos 2A$
❖ $2\cos^2 \frac{A}{2} = 1 + \cos A$
❖ $2\sin^2 \frac{A}{2} = 1 - \cos A$
❖ $\sin 2A = 2\sin A \cos A$

মূল নিয়মে অন্তরীকরণের সূত্র: $\frac{d}{dx}[f(x)] = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

❖ $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$
❖ $\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$
❖ $\frac{d}{dx}(c) = 0$
❖ $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$
❖ $\frac{d}{dx}(e^{-x}) = -e^x$
❖ $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$
❖ $\frac{d}{dx}(cosx) = -sinx$
❖ $\frac{d}{dx}(sinx) = \cos x$
❖ $\frac{d}{dx}(secx) = secx\ tanx$
❖ $\frac{d}{dx}(cosecx) = -cosecx\ cotx$
❖ $\frac{d}{dx}(tanx) = sec^2 x$
❖ $\frac{d}{dx}(cotx) = -cosec^2 x$
❖ $\frac{d}{dx}(cos2x) = -2sin2x$
❖ $\frac{d}{dx}(lnx) = \frac{1}{x}$
❖ $\frac{d}{dx}(log_a x) = = \frac{1}{x}\ log_a e$
❖ $\frac{d}{dx}(x) = 1$

- $\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
  - $\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{d}{dx}(u) + \frac{d}{dx}(v)$
  - $\frac{d}{dx}(u-v) = \frac{d}{dx}(u) - \frac{d}{dx}(v)$
  - দুটি চলক গুন আকারে থাকলে $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{d}{dx}(v) + v\frac{d}{dx}(u)$
  - দুটি চলক ভাগ আকারে থাকলে $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{d}{dx}(u) - u\frac{d}{dx}(v)}{v^2}$

অনুশীলনী- 9(C)

- $x^0 = \frac{\pi x}{180}$
- $\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x) = \frac{1}{1+x^2}$
- $\frac{d}{dx}(\cot^{-1}x) = -\frac{1}{1+x^2}$
- $\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
- $\frac{d}{dx}(\mathrm{cosec}^{-1}x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

- $2\cos^2 A = 1 + \cos 2A$
- $2\sin^2 A = 1 - \cos 2A$
- $2\cos^2\frac{A}{2} = 1 + \cos A$
- $2\sin^2\frac{A}{2} = 1 - \cos A$
- $\sin 2A = 2\sin A\cos A$
- $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$
- $\tan^{-1}x - \tan^{-1}y = \tan^{-1}\frac{x-y}{1+xy}$
- $\sin(\sin^{-1}x) = x,\ \sin^{-1}(\sin x) = x$
  অনুরুপভাবে অন্যগুলো

- $\tan 3\theta = \frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}$

অনুশীলনী- 9(D)

"দুটি চলকের মধ্যে একটি অন্যটির পাওয়ার হিসেবে থাকলে "

- $\frac{d}{dx}(u^v) = u^v\frac{d}{dx}(v\, lnu)$

***$\log_x a = \log_x e \times \log_e a = \frac{1}{\log_e x} \times \log_e a = \frac{lna}{lnx}$

- **"ধ্রুবকের পাওয়ার যদি চলক হয় "**

  - $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$

অনুশীলনী- 9(E)

- **অব্যক্ত ফাংশন :**যদি কোন ফাংশন f(x,y) = 0আকারের হয় এবং তাকে y=f(x) অথবা x = f(y) প্রকাশ করা না যায় ,তবে এরুপ ফাংশন কে অব্যক্ত ফাংশন বলে । যেমন : $3x^4 - x^2y + 2y^3 = 0$

❖ **পরামিতিক সমীকরণ :** দুটি চলকে যদি তৃতীয় আরেকটি চলকের মাধ্যমে প্রকাশ করা হয় ,তাহলে এ তৃতীয় চলককে পরামিতি এবং সমীকরণকে পরামিতিক সমীকরণ বলে । যেমন : $x = f(t)$এবং $y = g(t)$

(স্পর্শক ও অভিলম্ব)

অনুশীলনী- 9(H)

❖ বক্ররেখার স্পর্শকের সমীকরণঃ $P(x_1, y_1)$ বিন্দুতে $y = f(x)$ বক্ররেখার স্পর্শকের সমীকরণ হচ্ছে

$y - y_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_P .(x - x_1)$; এখানে $\left(\frac{dy}{dx}\right)_P$ হচ্ছে $P(x_1, y_1)$ বিন্দুতে বক্ররেখার স্পর্শকের ঢাল।

❖ বক্ররেখার অভিলম্বের সমীকরণঃ $P(x_1, y_1)$ বিন্দুতে $y = f(x)$ বক্ররেখার অভিলম্বের সমীকরণ হচ্ছে

$(x - x_1) + \left(\frac{dy}{dx}\right)_P (y - y_1) = 0$; এখানে $\left(\frac{dy}{dx}\right)_P$ হচ্ছে $P(x_1, y_1)$ বিন্দুতে বক্ররেখার স্পর্শকের ঢাল।

➢ অতি প্রয়োজনীয় ঃ

- কোন বিন্দুতে যদি $\frac{dy}{dx} = 0$ হয়, তবে ঐ বিন্দুতে বক্ররেখাটির স্পর্শক x অক্ষের সমান্তরাল।
- কোন বিন্দুতে যদি $\frac{dy}{dx} = \infty$ বা, $\frac{dx}{dy} = 0$ হয়, তবে ঐ বিন্দুতে বক্ররেখাটির স্পর্শক y অক্ষের সমান্তরাল হবে। (বা, x অক্ষের উপর লম্ব হবে)

- কোন বিন্দুতে যদি $\frac{dy}{dx} = 1$ হয়, তবে ঐ বিন্দুতে বক্ররেখাটির স্পর্শক x অক্ষের সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে।
- কোন বিন্দুতে যদি $\frac{dy}{dx} = \pm 1$ হয়, তবে ঐ বিন্দুতে বক্ররেখাটির স্পর্শক অক্ষদ্বয়ের সাথে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে।

গুরুমান ও লঘুমান

অনুশীলনী- 9(I)

❖ **সন্ধি বিন্দু :** বক্র রেখার যে বিন্দুতে প্রথম অন্তরীকরন শূণ্য তাকে সন্ধি বিন্দু বলে ।

❖ যে সকল রেখার $f'(x) \neq 0$ তাদের গুরুমান ও লঘুমান বিদ্যমান নেই ।